

Tentamen Gevorderde Algoritmen en Datastructuren

maandag 30 januari 2012, 9 - 12 uur

Je hoeft slechts 4 van de 5 opgaven te maken: de opgave met het minste aantal punten telt niet mee. Elke opgave levert maximaal 25 punten op. Het tentamencijfer T is $(p/10)$, waarbij p de som van de vier hoogste aantallen punten per opgave is.

Met de zinsnede ‘geef een algoritme’ in een opgave wordt bedoeld:

beschrijf een algoritme in pseudocode, licht de werking ervan toe, beargumenteer de correctheid.

1. Deze opgave gaat over zoekbomen (search trees) waarbij in de interne knopen gehele getallen opgeslagen zijn.
 - (a) Definieer het begrip *binair zoekboom*.
 - (b) Een (2,4)-boom is een meervoudige zoekboom waarin elke knoop hoogstens vier kinderen heeft en waarin alle externe knopen dezelfde diepte hebben. Geef een voorbeeld van een (2,4)-boom met minimaal aantal knopen die de getallen 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 bevat.
 - (c) Geef een algoritme voor het toevoegen van een getal aan een (2,4)-boom. De resulterende boom moet uiteraard weer een (2,4)-boom zijn! Analyseer de tijdscomplexiteit van het algoritme.
2. Een dief berooft een winkel waarin artikelen met nummers $0, \dots, N-1$ liggen. Artikel i heeft waarde w_i en gewicht g_i (w_i en g_i zijn positieve gehele getallen). De dief kan ten hoogste gewicht $G > 0$ meenemen. Geef een algoritme dat in $O(GN)$ tijd berekent voor welke waarde de dief maximaal aan artikelen uit de winkel kan meenemen.
Aanwijzing: gebruik dynamisch programmeren.
3. Het algoritme van Bellman-Ford vindt, in een gewogen gerichte graaf G met daarin knoop s , voor elke knoop v in G de lengte van een kortste pad van s naar v . Gewichten van de kanten (die als lengte geïnterpreteerd worden) mogen negatief zijn. Neem aan dat G sterk samenhangend en enkelvoudig is (geen self-loops, geen parallelle kanten), en verder dat G n knopen en m kanten bevat.
Het algoritme van Bellman-Ford werkt globaal als volgt: het labelt elke knoop met een getal dat de afstand tot s weergeeft, en loopt een aantal keer alle kanten langs om te zien of labelwaarden verlaagd kunnen worden.
 - (a) Aan welke voorwaarde moet G voldoen opdat er, voor elke knoop v , een kortste pad van s naar v is? Waarom is deze voorwaarde nodig?
 - (b) Geef het algoritme van Bellman-Ford en analyseer de tijdscomplexiteit.

4. Leg het principe van de discrete Fouriertransformatie uit en de toepassing ervan bij het vermenigvuldigen van polynomen. Gebruik (en definieer) daarbij de volgende begrippen:

de interpolatiestelling voor polynomen,
primitieve n -de eenheidswortels ω ,
de matrix F met $F[i, j] = \omega^{ij}$ en zijn inverse F^{-1} met $F^{-1}[i, j] = \omega^{-ij}/n$,
de convolutiestelling.

NB: het algoritme FFT wordt *niet* gevraagd.

5. Deze opgave gaat over complexiteitsklassen en de beslissingsproblemen SAT en CIRCUIT-SAT. SAT is als volgt gedefinieerd:

gegeven een formule A in de propositielogica die alleen de connectieven \neg, \wedge, \vee bevat, is er een toekenning van waarheidswaarden aan de variabelen in A zodanig dat A de waarde *true* krijgt?

CIRCUIT-SAT is als volgt gedefinieerd:

gegeven een logische schakeling S opgebouwd uit niet-, en- en of-poorten, is er een toekenning van nullen en enen aan de invoerdraden van S zodanig dat de uitvoerdraad van S de waarde 1 krijgt?

- (a) Toon aan dat CIRCUIT-SAT in de complexiteitsklasse NP zit.
(b) Er geldt dat SAT NP-volledig (NP-*complete*) is. Leg uit wat dit betekent.
(c) Gebruik het feit dat SAT NP-volledig is om aan te tonen dat CIRCUIT-SAT NP-volledig is. (NB: let op de goede richting van de probleemreductie.)